А.В. Якушев. Ще раз про рівняння прямої

Вперше в шкільному курсі математики рівняння прямої виводиться в 8 класі після розгляду початкових питань теми «Декартові координати на площині» (Погорєлов О.В. Геометрія. Підручник. для 7 – 9 кл. – К. :Школяр, 2004.). Рівняння отримують у вигляді $ax + by + c = 0$. Далі учням пропонуються задачі, в яких потрібно знайти рівняння прямої, що проходить через дві задані точки. При знаходженні цих рівнянь доводиться розв'язувати систему двох рівнянь з трьома невідомими. Одна з таких задач (35) розв'язана в підручнику, при цьому, щоб отримати остаточне рівняння, відбувається скорочення рівняння на ***c*** без пояснення можливості такого скорочення. Щоб позбутись цієї та інших незручностей пропонується іншій підхід вивчення питання, пов'язаного з рівняннями прямої і її властивостями.

1 Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки

Нехай пряма проходить через точки A(x_A;y_A) і B(x_B;y_B). Потрібно отримати рівняння цієї прямої. Для цього спочатку знайдемо рівняння прямої ***n***, яка проходить через середину відрізка AB (точка C($\frac{x_A + x_B}{2}$;$\frac{y_A + y_B}{2}$)) і перпендикулярна прямій AB .

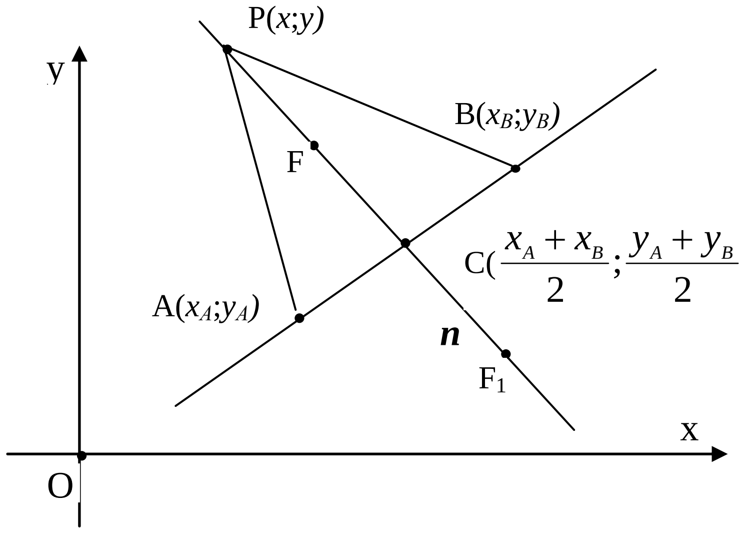

Рис. 1

Будь-яка точка P(x;y) (рис.1) прямої ***n*** рівновіддалені від точок A і B (і навпаки, всі точки рівновіддалені від точок A і B належать прямій ***n***), отже, $PA^2=PB^2$. Користуючись формулою відстані між точками, отримаємо:

$$(x-x_A)^2+(y-y_A)^2=(x-x_B)^2+(y-y_B)^2 \Leftrightarrow$$
$$-2xx_A+x_A{}^2-2yy_{\mathrm{A}}+y_A{}^2=-2xx_B+x_B{}^2-2yy_B+y_B{}^2 \Leftrightarrow$$
$$2x(x_B-x_A)+2y(y_B-y_A)-(x_B{}^2-x_A{}^2)-(y_{\mathrm{B}}{}^2-y_A{}^2)=0 \Leftrightarrow$$
$$(x_B-x_A)(x-\frac{x_A+x_B}{2})+(y_B-y_A)(y-\frac{y_A+y_B}{2})=0. \; (1)$$

Точка F$(y_B-y_A+\frac{x_A+x_B}{2};x_A-x_B+\frac{y_A+y_B}{2})$ не співпадає з точкою C – серединою відрізка AB (точки A і B – різні!) і належіть прямій ***n*** (можна перевірити, підставляючи координати цієї точки в рівняння (1)). Точка F_1, яка симетрична точці F відносно середини відрізка AB, має координати:

$$x_{F_1}=2\frac{x_A+x_B}{2}-(y_B-y_A+\frac{x_A+x_B}{2})=\frac{x_A+x_B}{2}+y_A-y_B;$$

$$y_{F_1}=2\frac{y_A+y_B}{2}-(x_A-x_B+\frac{y_A+y_B}{2})=\frac{y_A+y_B}{2}+x_B-x_A.$$

Із тих же міркувань, що і для прямої ***n***, рівняння прямої AB буде мати вигляд:

$$(x_{F_1}-x_F)(x-\mathrm{x_C})+(y_{F_1}-y_E)(y-\mathrm{y_C})=0. \; (2)$$

Підставляючи в (2) координати точок F, F_1 і C , одержимо:

$$2(y_B-y_A)(x-\frac{x_A+x_B}{2})-2(x_B-x_A)(y-\frac{y_A+y_B}{2})=0 \Leftrightarrow$$
$$(y_B-y_A)(x-x_A+\frac{x_A-x_B}{2})-(x_B-x_A)(y-y_A+\frac{y_A-y_B}{2})=0 \Leftrightarrow$$
$$(y_B-y_A)(x-x_A)-(x_B-x_A)(y-y_A)=0. \; (3)$$

Розглянемо окремі випадки:

1. При $x_A = x_B$ рівняння набуває вигляду $x = x_A$ – пряма паралельна осі y.
2. Якщо $y_A = y_B$, то рівняння прямої має вигляд $y = y_A$ – пряма паралельна осі x.

Користуючись рівнянням (3), учні легко можуть скласти рівняння прямої, що проходить через дві задані точки.

Розкривши в рівнянні (3) дужки і звівши подібні доданки, отримаємо рівняння виду: $ax + by + c = 0$, в якому a і b одночасно не можуть дорівнювати нулю.

2. Графік рівняння $ax + by + c = 0$ ($a^2 + b^2 \neq 0$)

Покажемо, що рівняння виду: $ax + by + c = 0$ (4), де x і y – змінні, a, b, c – сталі, причому, a і b одночасно не дорівнюють нулю - є рівнянням деякої прямої. Будемо вважати, що $b \neq 0$ (аналогічні міркування і для випадку, якщо $a \neq 0$). Надавши змінній x ($x \in R$) значень x_1 і x_2 ($x_1 \neq x_2$), з рівняння (4) отримаємо відповідні значення y_1 і y_2. Отже, $ax_1 + by_1 + c \equiv 0$ (5), $ax_2 + by_2 + c \equiv 0$ (6). Із (5) і (6) маємо: $a = -b\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Далі $ax + by + c = 0 \Leftrightarrow ax + by + c - (ax_1 + by_1 + c) = 0 \Leftrightarrow a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0 \Leftrightarrow -b\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + b(y - y_1) = 0 \Leftrightarrow -\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + (y - y_1) = 0 \Leftrightarrow (y_2 - y_1)(x - x_1) - (x_2 - x_1)(y - y_1) = 0$. Останнє рівняння є рівнянням прямої, яка проходить через точки $(x_1;y_1)$ і $(x_2;y_2)$, отже, і графіком рівняння $ax + by + c = 0$ ($a^2 + b^2 \neq 0$) є пряма.

Зауважимо, що з поняттям рівносильних рівнянь і основами рівносильних перетворень рівнянь і виразів, учні 8 класу знайомі.

3. Кутовий коефіцієнт прямої

Якщо в рівнянні прямої $ax + by + c = 0$ коефіцієнт $b \neq 0$, то рівняння цієї прямої можна представити в іншому вигляді: $y=kx+m$, де k називають кутовим коефіцієнтом прямої ($k = -\dfrac{a}{b}, m = -\dfrac{c}{b}$). Візьмемо дві точки цієї прямої: $(x_1;y_1)$ і $(x_2;y_2)$. Будемо вважати, що $x_1 < x_2$ Маємо: $y=kx+m \Leftrightarrow (y_2 - y_1)(x - x_1) - (x_2 - x_1)(y - y_1) = 0 \Leftrightarrow y = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$. Отже, $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Модуль кутового коефіцієнта прямої дорівнює тангенсу гострого кута, який утворює ця пряма з віссю абсцис, причому, якщо $k > 0$ – з додатнім напрямком осі x (рис. 2); якщо ж $k < 0$ – з від’ємним напрямком осі х; при k= 0 – пряма паралельна осі х.

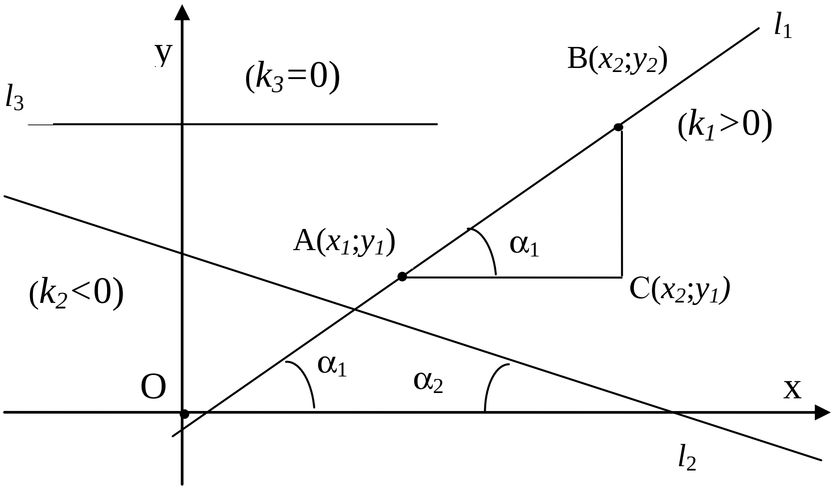

Рис. 2

Література

Погорєлов О.В. Геометрія. Підручник. для 7 – 9 кл. – К. :Школяр, 2004.